Emilia Lucreția Șerban

Carmen - Adriana Spiridon

30 Teste de antrenament pentru Evaluarea Națională

clasa a VIII-a

Matematică

Conform modelului actual al ME

Ars Libri

CUPRINS

1. Mulțimi de numere. Notații

N = {0, 1, 2,......, n,...} - mulțimea numerelor naturale
N* = {1, 2,......, n,...} - mulțimea numerelor naturale nenule
Z = {......, –2, –1, 0, 1, 2,......} - mulțimea numerelor întregi
$\mathbf{Z}_-$ = {......, –2, –1} - mulțimea numerelor întregi negative
$\mathbf{Z}_+$ = {1, 2,......} - mulțimea numerelor întregi pozitive
$\mathbf{Q} = \{x / x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$ - mulțimea numerelor raționale
$\mathbf{I} = \{\sqrt{d} / d \neq k^2, R \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ - mulțimea numerelor iraționale
d - se numește număr liber de pătrate
$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ - mulțimea numerelor reale, unde $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$
Relația de incluziune $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
Opusul unui număr real $x \in \mathbf{R}$ este $-x \in \mathbf{R}$
Inversul unui număr real $x \in \mathbf{R}$ este $\frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$

$\mathbf{Z}_- \cup \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} = \mathbf{Z}$

2. Operații cu numere reale

I. Operații de ordinul întâi

Adunarea: Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, există $s \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = s$; s - sumă; a, b - termeni
Proprietăți: a) Comutativitatea - Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$ avem $a + b = b + a$
b) Asociativitatea - Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$ avem $(a + b) + c = a + (b + c)$
c) Element neutru - $a + 0 = 0 + a = a$;
„0” este numărul care nu influențează operația de adunare

Scăderea: Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, există $d \in \mathbf{R}$, astfel încât $a - b = d$; d - diferență; a - descăzut; b - scăzător.

II. Operații de ordinul al doilea

Înmulțirea: Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, există $p \in \mathbf{R}$, astfel încât $a \cdot b = p$; p - produs; a, b - factori
Proprietăți: a) Comutativitatea - Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$ avem $a \cdot b = b \cdot a$
b) Asociativitatea - Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$ avem $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
c) Element neutru - $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$
„1” este numărul care nu influențează operația de înmulțire
d) Distributivitatea - Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$ avem $a(b + c) = ab + ac$ și $a(b - c) = ab - ac$

Împărțirea: Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, există $c, r \in \mathbf{R}$, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$; a - deîmpărțit; b - împărțitor; c - cât; r = rest.

III. Operații de ordinul al treilea

• Puterea naturală a unui număr real
Oricare ar fi $a \in \mathbf{R}^*$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ - notăm $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{de n ori}}$, a = bază; n = exponent
• Un număr natural a se numește pătrat perfect dacă există un număr natural b, astfel încât $a = b^2$.
• Un număr natural a se numește cub perfect dacă există un număr natural b, astfel încât $a = b^3$.
• Reguli de calcul cu puteri:
Fie $a, b, m, n \in \mathbf{N}$.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n, b \neq 0$

Observații:

1) **Z**: $n + (-n) = (-n) + n = 0$

$a \cdot (-1) = -a$; $(-a) \cdot (-1) = +a$

$a \cdot 0 = 0$

2) **Q**: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

• Rădăcina pătrată

Numărul x nenegativ este rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv $a \geq 0$ dacă $x^2 = a$.

Notăm $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, x \geq 0$

3. Operații cu numere întregi

• Adunarea a două numere întregi care au același semn: „*scriem semnul și facem adunarea*”.

• Scăderea a două numere întregi: se adună descăzutul cu inversul scăzătorului și procedăm ca la adunare. „*Scriem semnul celui mai mare în valoare absolută și facem scăderea*”.

• Înmulțirea și împărțirea a două numere întregi: regula semnelor

$(+) \cdot (+) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (+) = -$

$(-) \cdot (-) = +$

• Putere naturală a unui număr întreg $(-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ dacă } n = \text{număr par} \\ -a^n, \text{ dacă } n = \text{număr impar} \end{cases}$

4. Modulul unui număr real Z⊂Q⊂R

Modulul unui număr real x se definește ca distanța de la origine la punctul care reprezintă numărul x pe axa numerelor.

Notăm |x| și definim $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietăți:

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| \geq 0 \; (\forall)\; x \in \mathbf{R}$

$|-x| = |+x|$

$|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, a > 0$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq +a$

$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

5. Numere raționale

• $(\forall)\; x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$

• $(\forall)\; x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$

• Fracție ordinară $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$

• Fracții zecimale finite $\overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100} \in \mathbf{Q}$

• Procente: $p\% = \frac{p}{100}$, $p \in \mathbf{N}$

• Fracţii zecimale periodice

simple: $\overline{a,(bc)} = \frac{\overline{abc} - a}{99} \in \mathbf{Q}$

mixte: $\overline{a,b(c)} = \frac{\overline{abc} - \overline{ab}}{90} \in \mathbf{Q}$

• Simplificarea unei fracţii $\frac{a}{b}$ se face împărţind numărătorul şi numitorul prin d = (a, b), obţinând o fracţie ireductibilă.

• Amplificarea unei fracţii se face prin înmulţirea numărătorului şi numitorului cu acelaşi număr natural nenul.

• Inversa fracţiei $\frac{a}{b}$ este fracţia $\frac{b}{a}$, iar opusa este $-\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbf{N}^*$.

• Scoaterea întregilor din fracţie: împărţim numărătorul la numitor, câtul reprezintă întregul, iar restul este numărătorul fracţiei rămase.

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b},\ a > b,\ r < b$$

• Introducerea întregilor în fracţie: înmulţim întregul cu numitorul şi adunăm numărătorul, iar numitorul rămâne neschimbat.

$$n\frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b},\ b \neq 0,\ n \in \mathbf{Z}^*,\ a, b \in \mathbf{N}$$

6. Operaţii cu numere raţionale

• Adunarea şi scăderea: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{bd}$, $(\forall)\ a, b, c, d \in \mathbf{N},\ b, d \neq 0$

• Înmulţirea: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, $(\forall)\ a, b, c, d \in \mathbf{N},\ b, d \neq 0$

• Împărţirea: $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $(\forall)\ a, b, c, d \in \mathbf{N},\ b, c \neq 0$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c},\ (\forall)\ a, b, c \in \mathbf{N},\ b, c \neq 0$$

$$c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{c \cdot b}{a},\ (\forall)\ a, b, c \in \mathbf{N},\ a, b \neq 0$$

7. Operaţii cu numere iraţionale (radicali)

• $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $(\forall)\ a, b \geq 0$

• $\sqrt{a^2} = |a|$, $(\forall)\ a \in \mathbf{Q}$

• $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{N}^*,\ b \neq 0$

• $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq \sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{N}^*$

• $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $a > 0,\ n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$

• Extragerea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a|\sqrt{b}$

• Introducerea factorilor sub radical: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$; $-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{N}$

• Raţionalizarea numitorilor: ${}^{\sqrt{b})}\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$; ${}^{\sqrt{b})}\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{cb}$;

$$\frac{n}{a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}} = \frac{n(a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y})}{a^2x \pm b^2y},\ (\forall)\ a, b, c \in \mathbf{Q}^*,\ x, y > 0;\ x \neq y$$

• Formula radicalilor compuşi: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$, $C^2 = A^2 - B^2$

8. Divizibilitatea numerelor în N şi Z

Numărul $a \in \mathbf{Z}$ este divizibil cu numărul $b \in \mathbf{Z}^*$ dacă există numărul $c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a = b \cdot c$.

Scriem b|a și citim „*b divide a*”; a⋮b și citim „*a este divizibil cu b*”.

Mulțimea divizorilor unui număr întreg n este o mulțime finită, începe cu 1 și se termină cu numărul însuși și este formată din toate numerele întregi la care se împarte numărul n.

$\mathcal{D}_n = \{\pm 1; ...., \pm n\}$

Mulțimea multiplilor unui număr întreg n este o mulțime infinită; începe cu 0, se continuă cu numărul însuși, cu dublul său, cu triplul său etc. și este formată din toate numerele întregi care se împart la numărul n.

$\mathcal{M}_n = \{0; \pm n; \pm 2n; \pm 3n; ....\}$

9. Proprietățile relației de divizibilitate

1. $1|a$; $(\forall)\ a \in \mathbf{Z}$
$a|0$; $0⋮a$, $(\forall)\ a \in \mathbf{Z}^*$
$a|a$; $(\forall)\ a \in \mathbf{Z}^*$
2. $m|a$ și $a|n \Rightarrow m|n$, $(\forall)\ m, n, a \in \mathbf{Z}^*$
3. $a|1$, $a \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a = 1$; $a|1$, $a \in \mathbf{Z}^* \Rightarrow a = \pm 1$
4. $m|a$ și $m|b \Rightarrow m|(a \pm b)$, $(\forall)\ a, b, m \in \mathbf{Z}^*$
5. $m|(a \pm b)$ și $m|b \Rightarrow m|a$, $(\forall)\ a, b, m \in \mathbf{Z}^*$
6. $a|m \cdot a$, $(\forall)\ a, m \in \mathbf{Z}^*$
7. Dacă $P = a \cdot b \cdot c \Rightarrow a|P$; $b|P$; $c|P$, $(\forall)\ a, b, c \in \mathbf{Z}^*$
8. $a|n$; $b|n$; $(a, b) = 1 \Rightarrow a \cdot b|n$, $(\forall)\ a, b, n \in \mathbf{N}^*$
9. Un număr se numește prim dacă are exact doi divizori, pe 1 și pe el însuși. Altfel, se numește număr compus.

10. Criterii de divizibilitate

Criteriile de divizibilitate sunt reguli prin care putem afla divizorii unui număr întreg, fără a efectua împărțirea.

a) Criterii de divizibilitate de ultimă cifră: (2, 5, 10)
- Un număr natural este divizibil cu 2, dacă ultima sa cifră este pară (0, 2, 4, 6, 8).
- Un număr natural este divizibil cu 5, dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
- Un număr natural este divizibil cu 10, dacă ultima sa cifră este cel puțin un 0.

b) Criterii de divizibilitate de ultime două cifre: (4, 25)
- Un număr natural este divizibil cu 4, dacă ultimele sale două cifre formează un număr divizibil cu 4 sau sunt $\overline{00}$.
- Un număr natural este divizibil cu 25, dacă ultimele sale două cifre formează un număr divizibil cu 25 sau sunt $\overline{00}$.

b) Criterii de divizibilitate de sumă: (3, 9)
- Un număr natural este divizibil cu 3, dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.
- Un număr natural este divizibil cu 9, dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

11. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c). Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)

c.m.m.d.c = (a, b) este cel mai mare număr natural la care se împart numerele a, b. Pentru a calcula c.m.m.d.c a două sau a mai multor numere, procedăm astfel:
- Descompunem numerele în produse de factori primi.
- Alegem și înmulțim factorii comuni la puterea cea mai mică.

Pentru a calcula c.m.m.m.c a două au a mai multor numere, procedăm astfel:
- Descompunem numerele în produse de factori primi.
- Alegem și înmulțim factorii comuni și necomuni la puterea cea mai mare.

$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$

12. Mulțimi de numere

a) Mulțimi egale: $A = B$, dacă sunt formate din aceleași elemente;
b) Mulțimi incluse: $A \subset B$ dacă toate elementele din A se află în B;
c) Operații cu mulțimi:
- Reuniunea: $A \cup B = \{x/\ x \in A \text{ sau } x \in B\}$ este o nouă mulțime formată din elementele celor două mulțimi luate o singură dată.
- Intersecția: $A \cap B = \{x/\ x \in A \text{ și } x \in B\}$ este o nouă mulțime formată din elementele comune celor două mulțimi luate o singură dată.
- Diferența: $A - B = \{x/\ x \in A \text{ și } x \notin B\}$ este o nouă mulțime formată din toate elementele mulțimii A care nu se află în B.

13. Medii

- Media aritmetică: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$
- Media aritmetică ponderată: $m_p = \dfrac{a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$
- Media geometrică (proporțională): $m_g = \sqrt{a \cdot b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a, b \geq 0$
- Media armonică: $m_h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a + b}$, $a, b \neq 0$
- Media pătratică: $m_p = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$
- Inegalitatea mediilor: $a \leq m_h \leq m_g \leq m_a < b$; $a, b > 0$, $a \leq b$.

14. Rapoarte. Procente. Proporții

Se numește raportul a două mărimi, câtul neefectuat al acestora; se scrie $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{N}^*$. Numărul $R = \frac{a}{b}$ se numește valoarea raportului (câtul efectuat).

Tipuri de procente:
- procent $p\% = \dfrac{p}{100}$ raportul cu numitorul 100.
- scara unei hărți $s = \dfrac{d}{D}$ unde d este distanța pe hartă și D distanța din teren.
- concentrația unei soluții: $c = \dfrac{m}{M}$ unde m este masa substanței dizolvate și M masa soluției.
- titlul unui aliaj: $T = \dfrac{m}{M}$ unde m este masa metalului prețios și M masa aliajului.
- probabilitate: $P = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Se numește proporție egalitatea a două rapoarte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b, d \neq 0$; a, d = extremi; b, c = mezi.

Proprietatea fundamentală a proporției: $a \cdot d = b \cdot c$.

Proporții derivate:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \Rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Şir de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = k$

Proporţionalitate:

$\{a, b, c\}$ d.p. $\{x, y, z\} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$

$\{a, b, c\}$ i.p. $\{x, y, z\} \Rightarrow ax = by = cz = k$, k = coeficient de proporţionalitate

Regula de trei simplă:

Dacă a..................b   mărimi d.p. $x = \frac{c \cdot b}{a}$

c ....x = ?   mărimi i.p. $x = \frac{a \cdot b}{c}$

15. Formule de calcul prescurtat

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ - Identitatea lui Lagrange

16. Descompunerea în factori

- Metoda factorului comun: $ab + ac = a(b + c)$; $ab - ac = a(b - c)$
- Folosirea formulelor de calcul prescurtat:
  - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
  - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
  - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
  - $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
  - $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- Gruparea termenilor şi metode combinate:
  - $ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$
  - $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

17. Rapoarte de numere reale reprezentate prin cifre

- Expresie algebrică raţională este raportul $R(x) = \frac{E_1(x)}{E_2(x)}$; $E_1(x)$, $E_2(x)$ - expresii algebrice.
- Valoarea raportului $R(x) \in \mathbf{R}$, $E_2(x) \neq 0$
- $R(x)$ are sens pentru $E_2(x) \neq 0$
- $R(x)$ nu are sens pentru $E_2(x) = 0$
- Operaţiile cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere sunt aceleaşi ca la operaţiile cu fracţii ordinare.

18. Ecuația de gradul I

• Ecuația este propoziția matematică cu un singur predicat în care apare o singură dată „semnul egal".

• $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

Rezolvare: Dacă $b \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$ - ecuația este determinată și are soluție unică $x = -\frac{b}{a}$

Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ $\quad 0 \cdot x = b$ - ecuație imposibilă, soluția $x \in \emptyset$

Dacă $a = 0$, $b = 0$ $\quad 0 \cdot x = 0$ - ecuație nedeterminată, soluția $x \in \mathbf{R}$

• $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$.

$S = \{(x, y)/\ x, y \in \mathbf{R},\ y = \frac{-ax - c}{b}\}$

19. Inecuații de gradul I

Inecuația este propoziția matematică cu un singur predicat, unul din semnele: $\leq, \geq, >, <$.

Pentru rezolvare:

$ax + b \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}$; $S = [-\frac{b}{a}; \infty)$

$ax + b \leq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{b}{a}$; $S = (-\infty; -\frac{b}{a}]$

$ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$; $S = (-\frac{b}{a}; \infty)$

$ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$; $S = (-\infty; -\frac{b}{a})$

20. Ecuația de gradul al II-lea

$ax + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \Delta < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuația are două soluții reale distincte: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuația are două soluții reale egale: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

21. Sisteme de două ecuații cu două necunoscute

Forma generală $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

x, y = necunoscute; a_1, a_2, b_1, b_2 = coeficienți; c_1, c_2 = termeni liberi

a) Metoda grafică: S_1, S_2 mulțimea soluțiilor pentru fiecare ecuație

• $S = S_1 \cap S_2 = \{(x_0, y_0)\}$ soluție unică

• $S = S_1 \cap S_2 = S_1$ sau S_2 soluție infinită

• $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$ sistemul nu are soluții

b) Metoda substituției: se explicitează o necunoscută dintr-o ecuație și se înlocuiește în a doua ecuație, rezultând o ecuație de gradul I cu o necunoscută, care urmează să fie aflată și apoi se află necunoscuta explicitată inițial.

c) Metoda reducerii: constă în formarea unui sistem echivalent cu cel inițial prin înmulțirea unei ecuații sau a ambelor, astfel încât coeficienții unei necunoscute să fie numere egale, iar prin adunarea sau scăderea celor două ecuații, membru cu membru, se obține o ecuație de gradul I cu o singură necunoscută. Se află soluția acesteia. Înlocuim necunoscuta determinată în una dintre ecuațiile date, determinând cea de a doua necunoscută.

22. Intervale de numere reale

Intervale nemărginite

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R}/\ x < a\}$

Intervale mărginite

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}/\ a < x < b\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} / x \leq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} / x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} / x \geq a\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} / a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x < b\}$

Operații cu intervale

$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} / x \in A \text{ sau } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} / x \in A \text{ și } x \in B\}$

$A - B = \{x \in \mathbf{R} / x \in A \text{ și } x \notin B\}$

Proprietăți ale valorii absolute a unui număr real.

$|x| < a, a > 0, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$

$|x| \leq a, a > 0, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$

$|x| > a, a > 0, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x < -a; x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

$|x| \geq a, a > 0, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \leq -a; x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

23. Funcția de gradul I

• Fie mulțimile A, B. Se numește funcție de gradul I o aplicație între cele două mulțimi, care face să-i corespundă fiecărui element din A un unic element din B.

Spunem că am definit o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B, notăm $f: A \to B$; $f(x) = y$, $x \in A$, $y \in B$, unde A este mulțimea de definiție sau domeniul și B reprezintă mulțimea de valori sau codomeniul.

• Imaginea funcției: $Imf = \{f(x) | x \in A\} = B$

• Reprezentarea grafică reprezintă graficul funcției:

$Gf = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B, f(x) = y\}$

• $f: A \to \mathbf{R}$ funcție reală $f(x) = ax + b$

• Intersecția Gf cu axele

$Gf \cap Ox: y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow A(-\frac{b}{a}; 0) \in Ox$

$Gf \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = f(0) = b \Rightarrow B(0; b) \in Oy$

• Monotonia

Dacă $a > 0 \Rightarrow$ funcția este crescătoare, iar dacă $a < 0 \Rightarrow$ funcția este descrescătoare.

• Condiția ca un punct să aparțină graficului $A(x_0, y_0) \in Gf \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$

• Determinarea funcției se poate realiza dacă știm două puncte ale graficului, rezolvând următorul sistem:

$$\begin{cases} A(x_A, y_A) \in Gf \\ B(x_B, y_B) \in Gf \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f(x_B) = y_B \end{cases}$$

• Triunghiul format de Gf cu axele.

$A(x, 0); B(0, y) \Rightarrow |OA| = x; |OB| = y$

$Gf \cap Ox \cap Oy = \Delta AOB$ dreptunghic

• lungimea Gf cuprins între axe = ipotenuză $AB^2 = OA^2 + OB^2$

• perimetrul ΔAOB: $P = OA + OB + AB$

• aria ΔAOB: $A = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{2}$

• distanța de la origine la Gf = înălțime într-un triunghi dreptunghic: $OD \perp Gf$, $D \in Gf \Rightarrow OD = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{ip}$

• Coordonatele punctului de intersecție a două grafice se obține prin rezolvarea unei ecuații:

$Gf \cap Gg$: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = ...$ - se înlocuiește într-una din funcții și se obține $y \Rightarrow I(x, y)$

• Condiția de coliniaritate a trei puncte A, B, C. Din două puncte se determină o funcție și se verifică dacă și cel de-al treilea punct aparține Gf.

1. Punct. Dreaptă. Plan

a) Punctul este urma lăsată de creion pe hârtie. Nu are dimensiune. Se notează cu litere mari de tipar. Relația dintre două puncte este o relație de egalitate.

$A = C$ - puncte identice
$A \neq B$ - puncte diferite

b) Dreapta este o mulțime infinită de puncte. Nu are dimensiune. Se notează cu litere mici de tipar. Relația dintre un punct și o dreaptă este o relație de apartenență.

$A \in d$ - aparține
$M \notin d$ - nu aparține

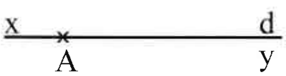
Două drepte pot fi:

- coplanare: - identice - $d_1 \subset d_2$
  - concurente - $d_1 \cap d_2 = \{0\}$
  - paralele - $d_1 \cap d_2 = \emptyset$
- necoplanare

Două sau mai multe puncte care aparțin aceleași drepte se numesc puncte coliniare. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Printr-un punct exterior unei drepte putem construi o singură dreaptă, și numai una, paralelă cu dreapta dată.

c) Semidreapta este dreapta mărginită la un capăt.



[Ay - semidreaptă închisă
(Ax - semidreaptă deschisă
A - originea semidreptei

d) Segmentul este dreapta mărginită la ambele capete.

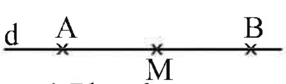
(AB) - segment deschis
[AB] - segment închis
(AB], [AB) - segment semideschis

Lungimea unui segment este distanța dintre capetele sale.

$d(A, B) = AB$ - se măsoară folosind rigla

Relația dintre două segmente este o relație de congruență $AB \equiv CD$ - congruent; $AB \not\equiv CD$ - necongruent.

Mijlocul unui segment este punctul unic care împarte segmentul în două segmente congruente.

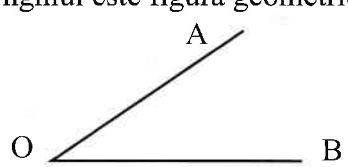


M mijloc AB $\Rightarrow AM = MB = \dfrac{AB}{2}$

e) Planul este o suprafață netedă cu două dimensiuni. Poate fi asemănat cu o suprafață plană. Se notează cu litere grecești. Relația dintre un punct și un plan este o relație de apartenență. Relația dintre o dreaptă și un plan este o relație de incluziune.

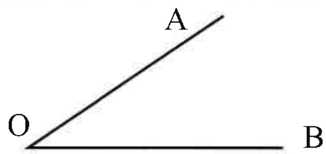
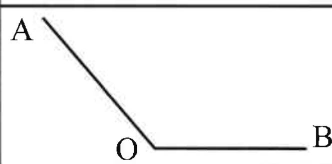
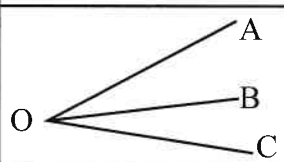
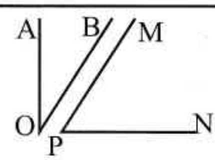
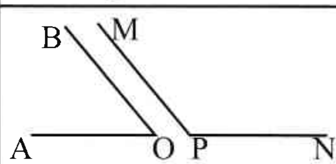
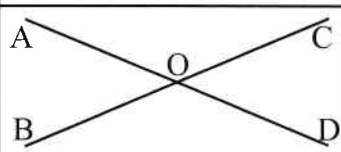
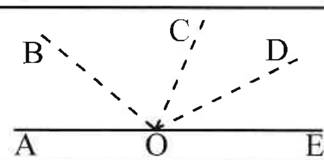
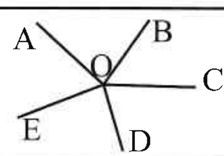
2. Unghiuri

Unghiul este figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine.

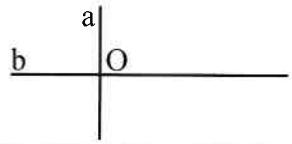
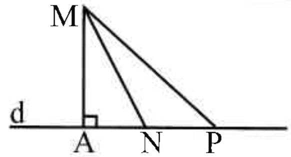
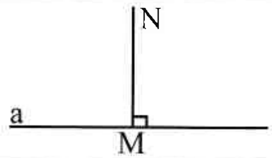
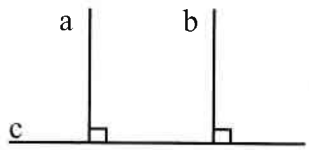
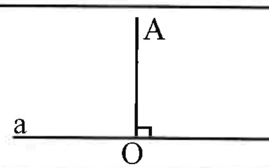


OA, OB laturile unghiului; O vârful unghiului.
Se notează $\hat{O}$; $\widehat{AOB}$; $\widehat{BOA}$ sau $\sphericalangle O$; $\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$

Unghiurile se măsoară în grade, cu ajutorul raportorului
$1^\circ = 60' = 3600''$

DEFINIȚII	DESEN	ELEMENTE, RELAȚII
Unghiul nul este unghiul cu laturile semidrepte suprapuse (identice)		$\sphericalangle AOB = 0^\circ$
Unghiul alungit este unghiul cu laturile semidrepte opuse.		$\sphericalangle AOB = 180^\circ$
Unghiul propriu (unghiul ascuțit) este unghiul care are măsura mai mică de 90°.		$\sphericalangle AOB > 0^\circ$ $\sphericalangle AOB < 90^\circ$
Unghiul propriu (unghiul obtuz) este unghiul care are măsura mai mare de 90°.		$90^\circ < \sphericalangle AOB < 180^\circ$
Unghiul drept este unghiul cu laturile semidrepte perpendiculare		$\sphericalangle AOB = 90^\circ$
Două unghiuri sunt adiacente dacă au vârf comun, latură comună, iar celelalte două laturi se află de o parte și de alta a laturii comune.		$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$ $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente
Două unghiuri sunt complementare dacă suma măsurilor lor este 90°.		$\sphericalangle AOB + \sphericalangle MPN = 90^0$ $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MPN$ complemetare
Două unghiuri sunt suplementare dacă suma măsurilor lor este 180°.		$\sphericalangle AOB + \sphericalangle MPN = 180^0$ $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MPN$ suplementare
Două unghiuri sunt opuse la vârf dacă au același vârf și laturile în prelungire.		$AD \cap BC = \{0\}$ $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$; $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ opuse la vârf
Unghiurile formate de o parte a unei drepte au suma măsurilor 180°.		$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE = 180^0$
Unghiurile formate în jurul unui punct au suma măsurilor 360°.		$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^0$

3. Perpendicularitate în plan

DEFINIȚII	DESEN	RELAȚII, FORMULE
Două drepte concurente sunt perpendiculare dacă formează patru unghiuri drepte.		$a \cap b = \{0\}$ $\sphericalangle O = 90^\circ \Rightarrow a \perp b$
Dintr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură perpendiculară, și numai una, pe dreapta dată.		$M \notin d$; $MA \perp d$ A = piciorul perpendicularei MN, MP oblice
Într-un punct al unei drepte se poate construi (se poate ridica) o singură perpendiculară, și numai una.		$M \in a$ $MN \perp a$ - unică
Două drepte perpendiculare pe o a treia dreaptă sunt paralele		$\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \end{array}\right\vert \Rightarrow a \parallel b$
Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea perpendicularei coborâtă din punct la dreaptă.		$A \notin a$; $d(A, a) = AO \perp a$

4. Paralelism în plan

Două drepte se numesc paralele, dacă nu au puncte comune.
Scriem $a \parallel b$ și citim „a paralelă cu d".

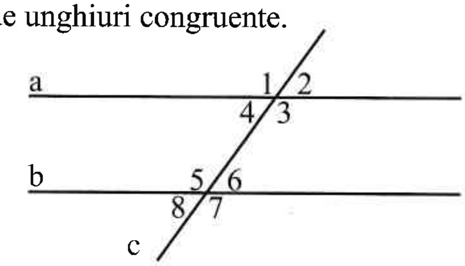
Postulatul lui Euclid

Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, trece o dreaptă și numai una paralelă cu dreapta dată.

$$\left.\begin{array}{l} A \notin d \\ A \in a \end{array}\right\vert \Rightarrow d \parallel a$$

Două drepte paralele a, b, tăiate de secanta c, formează perechi de unghiuri congruente.

- ✶ alterne interne: $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$
- ✶ alterne externe: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 8$; $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$
- ✶ corespondente: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$
  $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$



5. Triunghiuri

Triunghiul este figura geometrică cu 3 laturi.

• Clasificarea triunghiurilor:

a) după laturi: triunghi oarecare (scalen)
triunghi isoscel - două laturi congruente.
triunghi echilateral - toate laturile congruente.

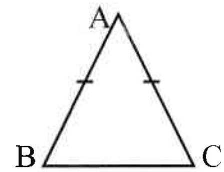
b) după unghiuri: triunghi ascuțitunghic - toate unghiurile ascuțite.
triunghi dreptunghic - un unghi drept.
triunghi obtuzunghic - un unghi obtuz.

Un triunghi există, dacă:
- suma tuturor unghiurilor este 180°;
- suma oricăror două laturi este mai mare decât a treia latură;
- diferența oricăror două laturi este mai mică decât a treia latură.

Triunghiul isoscel are două laturi congruente, iar cea de-a treia se numește bază.

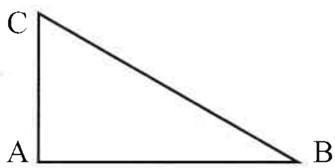
$\Delta ABC \Leftrightarrow AB \equiv AC$; BC bază

$\Leftrightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C$



Triunghiul echilateral are toate laturile și toate unghiurile congruente.

Triunghiul dreptunghic are un unghi drept, iar celelalte două unghiuri sunt complementare.



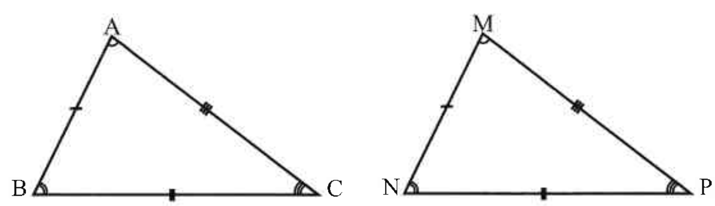
AB, AC - catete; $\sphericalangle BAC = 90^\circ$
BC - ipotenuză; $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90^\circ$

6. Cazuri de congruență ale triunghiurilor

a) $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MNP$ $\xRightarrow{LUL}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

b) $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NMP$ $\xRightarrow{ULU}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

c) $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$, $AC \equiv MP$ $\xRightarrow{LLL}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$



a) $AB = MP$, $AB = MN$ $\xRightarrow{c.c.}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

b) $AB = MN$, $BC = NP$ $\xRightarrow{i.c.}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

c) $AB = MN$, $\sphericalangle B = \sphericalangle N$ $\xRightarrow{c.u.}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$

d) $BC = NP$, $\sphericalangle B = \sphericalangle N$ $\xRightarrow{i.u.}$ $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$